

## FOGLIO DI ESERCIZI 5

GEOMETRIA 2 (2021-2022) - UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA  
DOCENTI: FRANCESCO POLIZZI, TOMMASO GENTILE

**Esercizio 1.** Dimostrare che ogni sottoinsieme non vuoto  $X \subseteq \mathbb{R}^p$  che sia aperto e connesso è anche connesso per archi.

**Esercizio 2.**

- (1) Sia  $X$  uno spazio topologico infinito con la topologia cofinita. Dimostrare che ogni sottospazio infinito  $Y \subseteq X$  è connesso. Dedurre che un sottospazio di  $X$  è connesso se e solo se è infinito oppure è formato da un solo punto.
- (2) Sia  $X = \mathbb{R}$  con la topologia della semicontinuità superiore. Dimostrare che ogni sottospazio  $Y \subseteq X$  è connesso.

**Esercizio 3.** Sia  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di sottospazi connessi di uno spazio topologico  $X$ , tali che  $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Dimostrare che l'unione

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

è uno spazio topologico connesso.

**Esercizio 4.** Uno spazio topologico  $X$  si dice *totalmente sconnesso* se gli unici sottospazi connessi di  $X$  sono i punti. Dimostrare quanto segue.

- (1)  $\mathbb{Q}$  è totalmente sconnesso.
- (2) Supponiamo che  $X$  sia uno spazio  $T_0$ . Se  $X$  possiede una base di aperti  $\mathcal{B}$  tale che ogni elemento di  $\mathcal{B}$  è anche chiuso, allora  $X$  è totalmente sconnesso. Dedurre che la retta di Sorgenfrey  $\mathbb{R}_{Sf}$  è totalmente sconnessa.

**Esercizio 5.** Considerare (a meno di omeomorfismi) tutte le possibili topologie sull'insieme con due punti  $\{0, 1\}$  e stabilire quali di esse sono connesse per archi.

**Esercizio 6.** Sia  $X$  uno spazio topologico e supponiamo che esista un sottoinsieme connesso non vuoto  $Y \subseteq X$ , contemporaneamente aperto e chiuso in  $X$ . Dimostrare che  $Y$  è una componente connessa di  $X$ .

*Suggerimento:* basta dimostrare che se  $Z$  è un sottoinsieme connesso di  $X$  con  $Y \subseteq Z$  allora  $Z = Y$ .